TITLE:
C_o coarse structures and Smirnov compactifications (General and Geometric Topology and its Applications)

AUTHOR(S):
嶺, 幸太郎; 山下, 温

CITATION:
嶺, 幸太郎 ...[et al]. C_o coarse structures and Smirnov compactifications (General and Geometric Topology and its Applications). 数理解析研究所講究録 2012, 1781: 14-28

ISSUE DATE:
2012-03

URL:
http://hdl.handle.net/2433/171850

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1781 巻 2012 年 14-28

C_0 coarse structures and Smirnov compactifications

筑波大学・数理物質科学研究科　嶺　幸太郎 (Kotaro Mine)
Graduate School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba
東北大学・情報科学研究科　山下　温 (Atsushi Yamashita)
Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University

1 序

トポロジーで連続性を論じるときには、空間のミクロな性質が重要であり、十分小さな球体に注目する。その反対に、十分大きな球体を考えることが重要な場合もある。空間そのものには局所的な構造がなく、いわば「すかすかな」「粗い」状態であるが、遠ざかって全体を見ると幾何的な構造が現れるという場合である。幾何学的群論では、有限生成群 G 上に（有限）生成系 S を固定し、S による語の長さによって G に距離を導入する。このような距離は非負整数値しか取らないので、位相的には離散空間で、局所的な構造は自明であり、しかも距離は S の取り方に依存している。しかし、いわば「遠ざかって見ると同じ」という関係である擬等長同型を導入すれば、このようにして G 上に決まる距離は擬等長同型を除いて一意的である。こうして、群を擬等長同型類で分類する、という幾何学的群論の基本的な考えが意味を持ってくる。

このような「粗い」幾何学は、トポロジーから一見遠いもののようである。しかし、「粗い」幾何学をもった空間には、測地半直線の仮想的な端を考えるなどの方法で、無限遠境界という位相空間を定義することができる。たとえば双曲空間 $\mathbb{H}^n$ のポアンカレ球体モデルにおいて、測地線は境界の $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} に直交する円弧に見えるが、ここでの S^{n-1} が無限遠境界の典型的な例である。また、幾何学的群論での中心的な研究対象である**双曲群**にも、この例を適切に一般化した方法により、無限遠境界を定義することができる。双曲群の無限遠境界には、位相よりも少し強く、距離が定義できる。実際には距離そのものが標準的に定まるのではなく、距離の擬 Möbius 同値類が定まる。これは双曲空間の例で S^{n-1} に自然に定まる等角構造の類似である。この擬 Möbius 同値類は、もとの双曲群を、擬等長同型を除いて一意的に決定することが知られている [5]。このように、良い状況のもとでは、無限遠境界の情報だけから、もとの空間の「粗い」幾何学の情報を完全に復元することができる場合がある。

今回の私たちの結果は、一言で述べれば、無限遠境界の位相だけから、もとの空間のある種の「粗い」幾何学の情報を復元できるというものである。これを明確に述べるには、「粗い」幾何学とは何か、つまり「遠ざかって見ると同じ」であるときに同じであるよう

な幾何的な構造とは何なのかを明確にしなくてはならない。そのような定式化の方法として、Higson-Pedersen-Roe [3] により導入された**粗構造 (coarse structure)** がある。粗構造が導入されたそもそもの動機は、Novikov 予想への解析的・位相的なアプローチを統一的に扱うことであった。しかし、本稿では粗構造の定義の動機にはさかのぼらず、粗構造の定義を述べ、重要な例を与えることから始めたい。なお、証明を省略した命題については、プレプリント [4] を参照されたい。本稿に現れる位相空間はすべて Hausdorff と仮定する。

2 粗構造の定義と例

2.1 粗構造の定義

まず集合上の粗構造の定義を述べる。

定義 2.1 (粗構造). 集合 X 上とは、直積 $X \times X$ の部分集合からなる族 $\mathcal{E}$ であって、次の五つの条件を満たすものをいう。

(1) $\Delta_X \in \mathcal{E}$
(2) $E \in \mathcal{E} \implies E^{-1} \in \mathcal{E}$
(3) $E \in \mathcal{E}, F \subset E \implies F \in \mathcal{E}$
(4) $E, F \in \mathcal{E} \implies E \cup F \in \mathcal{E}$
(5) $E, F \in \mathcal{E} \implies E \circ F \in \mathcal{E}$

ここで、Δ_X は対角線集合 $\{(x, x') \in X \mid x = x'\}$ を表し、$E, F \subset X \times X$ に対して

$$E^{-1} = \{(x', x) \in X \times X \mid (x, x') \in E\}$$
$$E \circ F = \{(x, x'') \in X \times X \mid (x, x') \in E \text{ かつ } (x', x'') \in F\}$$

とする。$\mathcal{E}$ の元を、**制御集合 (controlled set)** という。

まず、この定義が一様構造の定義と非常に似ていることに注意する。集合 X 上の一様構造も、$X \times X$ の部分集合族 $\mathcal{U}$ であって一定の条件を満たすものとして定義され、各 $U \in \mathcal{U}$ に対して $\{U[x] \mid x \in X\}$ が「一様な大きさのボールの族」を定めているのであった。ここで、$U[x]$ は

$$U[x] = \{x' \in X \mid (x', x) \in U\}$$

で定義される。粗構造 $\mathcal{E}$ においても、制御集合 $E \in \mathcal{E}$ を固定するごとに $\{E[x] \mid x \in X\}$ が、一様な大きさのボールの族をなすと考える。しかし、一様構造 $\mathcal{U}$ は上の (3) と反対の条件

(3′) $U \in \mathcal{U}, U \subset V \subset X \implies V \in \mathcal{U}$

を満たすことが仮定されているのだった。つまり、$\mathcal{U}$ に属する小さい集合は、それより大きい集合を決定するから、一様構造で重要なものは小さなボールであることが分かる。これと双対的に、粗構造で重要なものは大きなボールである。

一様構造が与えられた集合を一様空間と呼ぶように、集合 X とその上の粗構造 $\mathcal{E}$ との組 $(X,\mathcal{E})$ のことを**粗空間 (coarse space)** という。一様空間には標準的な位相が定まるが、粗空間には意味のある位相を定めることはできない。むしろ、あらかじめ位相が与えられた空間に粗構造を導入するのが普通である。

2.2 粗構造の例

ここまでの説明から推察されるように、粗構造の最も重要な例は次のものである。

例 2.2 (有界粗構造). (X,d) を距離空間とするとき、$X \times X$ の部分集合族

$$\mathcal{E}_d = \{E \subset X \times X \mid \sup_{(x,y)\in E} d(x,y) < \infty\}$$

は X 上の粗構造を定める。$\mathcal{E}_d$ を X 上の**有界粗構造 (bounded coarse structure)** という。

一般の粗構造についての諸概念は、有界粗構造を念頭におくと理解しやすい。たとえば、距離空間 (X,d) において E を有界粗構造の制御集合、つまり $\mathcal{E}_d$ の元とすると、$\{E[x] \mid x \in X\}$ は通常の意味で一様に押さえられた大きさのボールの族をなす。次の**有界性**の概念も、固有粗空間では、距離についてのものと一致することが容易に確かめられる。

定義 2.3. 粗空間 $X = (X,\mathcal{E})$ の部分集合 B が**有界 (bounded)** とは、$B \times B \in \mathcal{E}$ となることをいう。

固有粗空間は距離空間上に定まる構造なので、粗構造と同時に自然な位相を持っている。一般に、位相と粗構造のあいだには次の関係を要請しておくと都合がよい。

定義 2.4 (固有粗構造). X をパラコンパクト空間とするとき、集合 X 上の粗構造 $\mathcal{E}$ が**固有 (proper)** であるとは、次の二つの条件が成り立つことである。

(a) X のすべての有界集合は相対コンパクトである。
(b) 対角線集合 Δ_X の近傍をなす制御集合が存在する。

このとき、位相空間 X に粗構造 $\mathcal{E}$ を付随させたもの $(X,\mathcal{E})$ を固有粗空間という。

Euclid 空間、あるいは一般に完備な Riemann 多様体においては、有界閉集合はコンパクトとなる。一般に任意の有界閉集合がコンパクトとなるような距離空間は**固有**であるという。固有距離空間においては、有界粗構造は定義 2.4 の意味で固有となる。

固有距離空間における有界粗構造を含め、興味のある多くの場合、固有粗構造の定義 (a) では逆も成り立つ (注意 3.2 を参照)。実際、固有粗空間 $(X,\mathcal{E})$ が**粗連結 (coarsely connected)**、すなわち任意の $x,y \in X$ に対して $\{(x,y)\} \in \mathcal{E}$ であれば、X の相対コンパクト集合は有界である。なお、粗連結でない粗空間の例は、値に ∞ も許す「距離」についての有界粗構造を考えれば得られる。

粗構造の例としては有界粗構造のほかに、次に挙げる C_0 粗構造と、位相的粗構造が重要である。

例 2.5 (C_0 粗構造 [10]). (X,d) を局所コンパクト距離空間とする。$X \times X$ の部分集合 E は次を満たすとき、C_0 **制御集合**であるという：「任意の $\varepsilon > 0$ に対して、コンパクト集合 $K \subset X$ を適当にとると、すべての $(x,y) \in E \setminus K \times K$ に対して $d(x,y) < \varepsilon$ である。」このとき、C_0 制御集合の全体 $\mathcal{E}_d^0$ は X 上の粗構造をなすことが示され、$\mathcal{E}_d^0$ を X 上の C_0 **粗構造 (C_0 coarse structure)** という。

注意 2.6. C_0 粗構造の概念は、局所コンパクトな一様空間に容易に拡張できる。

C_0 は「ゼロに収束 (converge) する」という意味である。局所コンパクト距離空間上では、有界粗構造 $\mathcal{E}_d$ と C_0 粗構造 $\mathcal{E}_d^0$ の二通りの粗構造を考えることができ、包含関係 $\mathcal{E}_d^0 \subset \mathcal{E}_d$ が成立する。C_0 粗構造の直観的意味は、次のようにして、ボール $E[x]$ の言葉で書き直すと分かりやすい。$E \subset X \times X$ が**対称的**とは、$E = E^{-1}$ であることをいう。

命題 2.7. 局所コンパクト距離空間 (X,d) に対して、対称的な $E \subset X \times X$ が C_0 制御集合であるための必要十分条件は、X 上の関数 $x \mapsto \operatorname{diam} E[x]$ が無限遠でゼロに収束することである。 □

次に、局所コンパクト空間 X にコンパクト化 $\tilde{X}$ が与えられている状況を考える。このとき、X には $\tilde{X}$ から次のようにして決まる自然な粗構造がある。

定義 2.8 (位相的粗構造). $\tilde{X}$ を局所コンパクト空間 X のコンパクト化とし、$\partial X = \tilde{X} \setminus X$ とする。このとき、$X \times X$ の部分集合族 $\mathcal{E}_{\tilde{X}}$ を次の条件によって定める。

$$E \in \mathcal{E}_{\tilde{X}} \iff \overline{E} \setminus X \times X \subset \Delta_{\partial X}$$

ここで、$\overline{E}$ は $\tilde{X} \times \tilde{X}$ における E の閉包で、$\Delta_{\partial X}$ は ∂X の対角線集合である。このとき、$\mathcal{E}_{\tilde{X}}$ は X 上の粗構造の条件を満たし、$\tilde{X}$ による**位相的粗構造 (topological coarse structure)** という[*1]。

この定義も、ボールの言葉で次のように言い換えることができる。

命題 2.9. 局所コンパクト空間 (X,d) に対して、対称的な $E \subset X \times X$ が $\mathcal{E}_{\tilde{X}}$ に属するための必要十分条件は、$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が $\omega \in \partial X$ に収束する X 内のネットであるならば、$(E[x_\lambda])$ も次の意味で ω に収束することである。「ω の任意の開近傍 U に対して $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して、$\lambda \geq \lambda_0$ ならば $E[x_\lambda] \subset U$ となる。」 □

2.3 粗空間のあいだの写像

粗空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$ としては、次のような粗写像を考える。これは標語的には、「空間の広がり方を変えない」写像であるということができる。粗空間に位相が入っている場合でも粗写像に連続性は仮定しない。

[*1] 連続制御粗構造 (continuously controlled coarse structure) という呼び方もある。

定義 2.10 (粗写像). $(X,\mathcal{E}),(Y,\mathcal{F})$ を粗空間とする。写像 $f\colon X\to Y$ が**粗写像 (coarse map)** であるとは、以下の二つの条件が成り立つことをいう。

(1) $E\in\mathcal{E}$ ならば $(f\times f)(E)=\{(f(x),f(x'))\,|\,(x,x')\in E\}\in\mathcal{F}$ である。
(2) $B\subset Y$ が有界ならば、$f^{-1}(B)$ も有界である。

最も典型的な、固有距離空間の有界粗構造の場合には、上の定義は次のように言い換えられる。

命題 2.11. X,Y を固有な距離空間とし、それぞれに有界粗構造を導入する。このとき、$f\colon X\to Y$ が粗写像であるための必要十分条件は、f が固有写像（つまり、各コンパクト集合の逆像がコンパクト）であり、かつ、適当な単調増加関数 $\eta\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ が存在して、任意の $x,x'\in X$ に対して

$$d_Y(f(x),f(x'))<\eta(d_X(x,x'))$$

が成立することである。 □

更に、二つの粗空間が本質的に同じであることを述べた粗同値の概念を導入する。粗同値を与える写像は全単射とは限らない。例えば、有界粗構造について $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ と粗同値である。さて、集合 S から粗空間 X への二つの写像 $f,g\colon S\to X$ が**近い (close)** とは、$X\times X$ の部分集合 $\{(f(s),g(s))\,|\,s\in S\}$ が制御集合であることをいう。この概念を用いて、粗同値性は以下のように定義される。

定義 2.12 (粗同値). 粗写像 $f\colon X\to Y$ が**粗同値写像 (coarse equivalence)** であるとは、粗写像 $g\colon Y\to X$ が存在して、$g\circ f$, $f\circ g$ がそれぞれ id_X, id_Y と近いことをいう。粗同値写像 $f\colon X\to Y$ が存在するとき、粗空間 X,Y は**粗同値 (coarsely equivalent)** であるという。

注意 2.13. 粗同値写像に近い写像は粗同値写像である。また粗同値写像の合成は、粗同値写像である。

例 2.14. 包含写像 $f\colon\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{R}$ は有界粗構造について粗同値写像を与え、その逆 $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ の一つは整数部分を取る写像 $g(x)=[x]$ である。一般に、距離空間 Y の部分集合 X について、$R>0$ が存在して Y のどの点も X のある点から R 以内にあるとき、包含写像 $X\hookrightarrow Y$ は粗同値写像である。

粗空間として有限生成群の例は非常に重要である。以降で必要になることはないが、有限生成群のあいだの粗同値性について簡単にふれる。有限生成群 G に対して、有限生成系 $S\subset G$ を固定する。簡単のため、S は対称的、すなわち $S=S^{-1}$ であるとする。S についての G 上の**語距離 (word metric)** d_S は

$$d_S(g,g')=\min\{n\geq 0\,|\,g'=gs_1\cdots s_n \text{ となる } s_1,\ldots,s_n \text{ が存在 }\}$$

で定義される。d_S は確かに距離となる。語距離は、Cayley グラフの上の最短距離ともみなせる。G の生成系 S に関する **Cayley グラフ**とは、G を頂点集合とし、二つの頂

点 g, g' を $g'g^{-1} \in S$ であるときに辺で結ぶことにより定義されるグラフ $\Gamma(G, S)$ のことである。このグラフの各辺に長さ 1 を与え、最短経路による距離を与えれば、さきほどの語距離 d_S は、この距離の頂点集合 G への制限に他ならない。更に、包含写像 $G \hookrightarrow \Gamma(G, S)$ は例 2.14 により粗同値写像を与える。

一般に距離空間 (X, d) が**測地空間 (geodesic space)** であるとは、任意の $x, y \in X$ に対して、$D = d(x, y)$ とするとき、$\gamma(0) = x, \gamma(D) = y$ となる等長埋め込み $\gamma\colon [0, D] \to X$ が存在することである。γ を x と y とを結ぶ**測地線分**という。測地線分は x と y によって一意的に定まるとは限らないことに注意する。例えば、ノルム空間の凸集合は自然に測地空間となる。また、上の Cayley グラフのように、グラフの各辺に長さ 1 を与え、最短経路で距離を導入したものも測地空間である。測地空間のあいだの粗同値写像は、次のように特徴づけられる。

命題 2.15. X, Y を測地空間とし、それぞれ有界粗構造をもつとする。このとき $f\colon X \to Y$ が粗同値写像であるための必要十分条件は、次の二つが成り立つことである。

(1) 定数 $A, B > 0$ が存在して、任意の $x, x' \in X$ に対して

$$A^{-1}d(x, x') - B \leq d(f(x), f(x')) \leq Ad(x, x') + B.$$

(2) 定数 $C > 0$ が存在して、Y のどの点も像 $f(X)$ のある点から C 以内にある。

$\square$

定義 2.16. 一般に、距離空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$ が命題 2.15 の条件 (1)(2) を満たすとき、f を X から Y への**擬等長写像 (quasi-isometry)** という。このとき X と Y は**擬等長同型 (quasi-isometric)** であるという。

したがって、測地空間（に有界粗構造を入れたもの）の間の写像が粗同値であることは、擬等長写像であることと同値である。これは、特に Cayley グラフ $\Gamma(G, S)$ についても正しい。ところが、すでに注意したように G は $\Gamma(G, S)$ と粗同値であったから、注意 2.13 により、次を得る。

命題 2.17. G, G' を有限生成群、$S \subset G, S' \subset G'$ をそれぞれ対称な有限生成系とする。このとき、(G, d_S) と $(G', d_{S'})$ が有界粗構造に関して粗同値であるための必要十分条件は、これらが擬等長同型となることである。

上の命題を用いて、次を語距離の定義から簡単に示すことができる。

命題 2.18. G を有限生成群、$S, T \subset G$ を二つの対称な有限生成系とすると、恒等写像 $\mathrm{id}\colon (G, d_S) \to (G, d_T)$ は粗同値である。

これは、G 上の有界粗構造が、生成系の取り方 S に依存せず、群 G のみで決まっていることを意味する。幾何学的群論は、この粗構造から決まる性質、つまり擬等長不変な性質によって群を分類することを試みる分野である。

2.4 Higson コロナ

冒頭で述べたとおり、「粗い」幾何学においては、適切な無限遠境界を考えることが重要である。たとえば、Gromov の意味で双曲的な測地空間では、「測地半直線の果て」を点と考えることによって、無限遠境界を幾何的に構成することができる。しかし、一般の粗空間の枠組みだけから幾何的な構成をすることは難しい。以下で定義する Higson コロナは、一般の粗空間について定義できる無限遠境界であって、Novikov 予想へのアプローチにも重要な役割を果たすものである [7]。

簡単のため、固有粗空間の Higson コロナに限定して話を進める。固有粗空間は定義 2.4 から X は局所コンパクト空間であることが分かる。一般に、局所コンパクト空間 X のコンパクト化 $\tilde{X}$ は $\tilde{X}$ に拡張可能な実数値連続関数の全体のなす環 $\mathcal{A}(\tilde{X})$ を定める：

$$\mathcal{A}(\tilde{X}) = \{f|_X \mid f \text{ は } \tilde{X} \text{ 上の実数値連続関数}\}.$$

逆に X 上の実数値連続関数からなる環 $\mathcal{A}$ であって、単位元である定数関数 1 が属し、X の位相を生成し*2、一様収束について閉じたものが与えられたとする。このとき Gelfand による良く知られた結果により、$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\tilde{X})$ を満たすようなコンパクト化 $\tilde{X}$ が同値を除いて一意的に存在する（たとえば、[6, 4.5m, 4.5q] を参照）。さて、このとき Higson コンパクト化は、Higson 関数とよばれる「無限遠に近づくにつれて振動が限りなく小さくなる」ような関数のなす環から定義される。

定義 2.19. X を固有粗空間とするとき、有界関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が **Higson 関数**であるとは、X の任意の制御集合 $E \subset X \times X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$K \subset X$ を適当に取ると $x \in X \setminus K, x' \in E[x]$ のとき $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ が成立することをいう。

一言でいえば、有界関数 f が Higson 関数であるとは、任意の制御集合 E に対して $\lim_{x\to\infty} \operatorname{diam} f(E[x]) = 0$ が 成立することである。連続な Higson 関数の全体 $C_h(X)$ は単位元をもつ環で、一様収束について閉じていることは容易に示される。したがって上に述べたことより、$C_h(X) = \mathcal{A}(hX)$ となる X のコンパクト化 hX が一意的に存在する。

定義 2.20. 固有粗空間 X に対して、このコンパクト化 hX を X の **Higson コンパクト化**という。またコンパクト化の剰余 $\nu X = hX \setminus X$ を X の **Higson コロナ**という。

先行研究で現れる多くの場合、Higson コンパクト化は「巨大なコンパクト化」であった。実際、コンパクトでない固有距離空間 X の（有界粗構造に関する） Higson コンパクト化は可算離散空間の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\omega$ を部分空間にもつため濃度は $2^{\mathfrak{c}}$ 以上で、特に距離付け可能ではない。しかし、本稿での主な考察対象である全有界距離空間の C_0 粗構造の場合は、距離付け可能なコンパクト化になる。

---

*2 位相空間 X 上の実数値連続関数の集合 $\mathcal{F}$ が X の位相を生成するとは、任意の $x \in X$ と x の開近傍 U に対して、$f \in \mathcal{F}$ であって $f(x) \notin \overline{f(X \setminus U)}$ となるものが存在することをいう。

固有粗空間のあいだの粗写像は連続とは限らないが、Higson コロナに**連続**写像を誘導する。このことを見るために、まず $C(hX)=C_h(X)$ より $C(\nu X)=C_h(X)/C_0(X)$ であることに注意する。ここで $C_0(X)$ は無限遠でゼロに収束する連続関数のなす環である。さて、粗写像を扱うため、連続とは限らない関数のなす環として、Higson 関数全体のなす環 $B_h(X)$ と無限遠でゼロに収束する有界関数全体のなす環 $B_0(X)$ を考えよう。このとき、固有粗空間 X に対して自然な同型 $C_h(X)/C_0(X)=B_h(X)/B_0(X)$ がある*3。

粗写像 $f\colon X\to Y$ は、引き戻しにより準同型 $f^*\colon B_h(Y)\to B_h(X)$ および $f^*\colon B_0(Y)\to B_0(X)$ を誘導することが、定義によって簡単に確かめられる。したがって固有粗空間 X,Y に対して準同型

$$C(\nu Y)=\frac{C_h(Y)}{C_0(Y)}=\frac{B_h(Y)}{B_0(Y)}\to\frac{B_h(X)}{B_0(X)}=\frac{C_h(X)}{C_0(X)}=C(\nu X)$$

が誘導される。この準同型は一意的な連続写像 $\nu f\colon \nu X\to\nu Y$ による引き戻しに等しい（たとえば、[2, Theorem 10.6] を参照）。こうして、粗写像 f から連続写像 νf が定まった。

3 C_0 粗構造と位相的粗構造の性質

この節では、今回の結果で重要な役割をもつ C_0 粗構造と位相的粗構造の基本的性質と両者の関係について論じる。

3.1 固有性

C_0 粗構造も位相的粗構造のどちらも位相空間上に定まった粗構造であるから、まず、固有粗構造（定義 2.4）であるかどうかが問題となる。

命題 3.1. (1) (X,d) が可分な局所コンパクト距離空間のとき、C_0 粗構造 $\mathcal{E}_d^0$ は固有である。

(2) $\tilde{X}$ が局所コンパクトなパラコンパクト空間 X のコンパクト化のとき、$\tilde{X}$ が距離付け可能であれば、位相的粗構造 $\mathcal{E}_{\tilde{X}}$ は固有である。

この命題の証明は、(1) については [4, Proposition 2.1] を、(2) については Roe [8, Theorem 2.27] を参照のこと。なお、(2) の Roe [8] における証明は、一般のコンパクト化でも正しいように書かれているが、実際には $\tilde{X}$ が距離付け可能（あるいは少なくとも、perfectly normal）でないと正しくない。この仮定を外した場合、たとえば $X=[0,\infty)$, $\tilde{X}=\beta X$ が反例となる [4, Remark 2.4]。

注意 3.2. 上の命題の (1) における可分性や (2) における距離付け可能性を外した場合、必ずしも成り立たないのは定義 2.4 の固有性の条件のうち (b) の方であり、(a) はいつで

*3 固有粗空間でパラコンパクト性を仮定したのは、ここで 1 の分割の議論が必要になるからである。

も成立する。また、(a) の逆、つまり相対コンパクト集合が有界となるという主張も、任意の C_0 粗構造と位相的粗構造に対して明らかに成立する。

問題 3.3. X を局所コンパクトな一様空間とする。X 上には、一様構造に関する C_0 粗構造が定まる（注意 2.6 を参照）。この C_0 粗構造が固有となるのはどのような場合か？

3.2 一様連続性と C_0 粗構造

一様連続性と C_0 粗構造との関連は、Hilbert 立方体 の Z-set の位相型と補集合の C_0 粗構造との対応についての論文 [1] で既に示唆されていたが、これを一般の局所コンパクト距離空間に拡張することはそう難しくない。局所コンパクト空間のあいだの連続写像 $f\colon X \to Y$ が**固有**であるとは任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して $f^{-1}(K)$ がコンパクトとなることをいうのであった。

命題 3.4. $(X,d),(Y,\rho)$ を局所コンパクト距離空間とする。このとき連続写像 $f\colon X \to Y$ が C_0 粗構造に対して粗写像であるための必要十分条件は、それが固有な一様連続写像となることである。

証明. 簡単のため、X が可分であると仮定して証明する（一般の場合は [4, Corollary 3.4] を参照）。このとき、$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ となるコンパクト集合の増大列 (K_n) が存在する。$f\colon X \to Y$ が粗写像であるとすると、定義 2.10 の条件 (2) と注意 3.2 より、f は固有写像である。もし f が一様連続でないならば、$r>0$ と X の点列 $(x_n),(x'_n)$ であって、$d(x_n,x'_n) < 1/n,\ x_n,x'_n \notin K_n$ かつ $\rho(f(x_n),f(x'_n)) \geq r$ となるようなものが存在する。$E = \{(x_n,x'_n)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ は X の C_0 制御集合であることが容易に分かる。したがって、定義 2.10 の条件 (1) により、$\{(f(x_n),f(x'_n))\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ は Y の C_0 制御集合となる。しかし、これは $(x_n),(x'_n)$ の取り方に反している。

逆に、f が固有な一様連続写像であるとするとき、f が粗写像であることは粗写像の定義 2.10 と注意 3.2 から容易に従う。 □

次の命題も、上と似た発想により証明することができる。

命題 3.5. (X,d) を可分な局所コンパクト距離空間とする。このとき、有界な連続写像 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が Higson 関数であるための必要十分条件は、それが一様連続となることである。 □

補題 3.6 ([9, Theorem 2.5]). 距離空間 (X,d) のコンパクト化 $\tilde{X}$ に対して、次は同値である。

(1) 連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が $\tilde{X}$ 上に連続に拡張可能であるための必要十分条件は、f が有界かつ一様連続となることである。
(2) 部分集合 $A,B \subset X$ に対して $\mathrm{cl}_{\tilde{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\tilde{X}} B = \emptyset$ であるための必要十分条件は、$d(A,B) > 0$ となることである。 □

§2.4 で述べたことから上の条件を満たすコンパクト化 $\tilde{X}$ は一意的に存在し、(X,d) の

Smirnov コンパクト化とよばれる。Smirnov コンパクト化は一様空間に対しても同様に定義される。

系 3.7. 可分な局所コンパクト距離空間の C_0 粗構造に関する Higson コンパクト化は、Smirnov コンパクト化に等しい。 □

注意 3.8. 命題 3.4, 3.5 と系 3.7 は、注意 2.6 で述べた局所コンパクト一様空間の C_0 粗構造については、一般には成立しない。実際、次のような反例がある。

例 3.9. 非可算集合 X を固定する。$A \subset X$ に対して

$$U(A) = \Delta_A \cup (X \setminus A)^2$$

とおく。$X \times X$ の部分集合族 $\mathcal{U}$ を、ある可算部分集合 $A \subset X$ に対して $\Delta_X \subset U \subset U(A)$ となる U の全体として定義すると、$\mathcal{U}$ は X 上の一様構造を与え、X に離散位相を定める。一様空間 $(X, \mathcal{U})$ 上の C_0 粗構造 $\mathcal{E}^0_{\mathcal{U}}$ を考えると、これは X 上の**離散粗構造**、すなわち、

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X \mid E \setminus \Delta_X \text{ は有限集合 }\}$$

に一致する。実際、$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^0_{\mathcal{U}}$ をみるのは易しい。逆の包含関係を示すため、$E \subset X \times X$ に対して $E \notin \mathcal{E}$、すなわち $E \setminus \Delta_X$ が無限集合であると仮定する。可算無限集合 $A \subset E \setminus \Delta_X$ を選び、$F = \mathrm{pr}_1(A) \cup \mathrm{pr}_2(A)$ とする。F は可算集合だから、$U(F) \in \mathcal{U}$ であるが、$U(F) \cap A = \emptyset$ である。よって任意のコンパクト集合（つまり有限集合）$K \subset X$ に対して $E \setminus (K \times K) \not\subset U(F)$ である。したがって $E \notin \mathcal{E}^0_{\mathcal{U}}$ である。

$\mathcal{E}^0_{\mathcal{U}}$ が離散粗構造であることから、$X = (X, \mathcal{E}^0_{\mathcal{U}})$ 上の任意の有界実数値関数は Higson 関数であることが分かる。しかし、X 上には（$\mathcal{U}$ について）一様連続でない関数が存在する。たとえば、$X = X_0 \cup X_1$ と X を交わりのない二つの非可算集合に分解し、$f \colon X \to \mathbb{R}$ を X_0 上で 0、X_1 上で 1 と定義すれば、これは一様連続ではない。したがって、X 上の Higson 関数は必ずしも一様連続ではない。

例 3.10. $(X, \mathcal{U})$ を上の例とし、$Y = \mathbb{N}$ とする。Y は $\mathbb{R}$ の部分空間として局所コンパクト距離空間（したがって、一様空間）となる。$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ と交わりのない可算個の非可算集合に分解し、$f \colon X \to Y$ を X_n 上 n と定義すれば、これは C_0 粗構造について粗写像であるが、一様連続ではない。

なお一般に局所コンパクトな一様空間において、有界な一様連続関数が C_0 粗構造について Higson 関数であることは直ちに証明できる。そこで、以下の問題が残る。

問題 3.11. 局所コンパクト一様空間上の C_0 粗構造に関する Higson 関数がすべて一様連続となるのは、どのようなときか。

3.3 位相的粗構造と C_0 粗構造

局所コンパクト距離空間として、半開区間 $X = [0, 1)$ を考える。X には C_0 粗構造のほかに、コンパクト化 $\tilde{X} = [0, 1]$ から定まる位相的粗構造が考えられる。命題 2.7 と命題 2.9 により、この二つの粗構造は一致することが直ちに示される。一般に、次が成り立つ。

定理 3.12. (X, d) を局所コンパクト距離空間とする。X 上の C_0 粗構造は、X の Smirnov コンパクト化 uX から定まる位相的粗構造と等しい。すなわち、$\mathcal{E}_d^0 = \mathcal{E}_{uX}$ である。

注意 3.13. 上の定理の状況で、系 3.7 により uX は C_0 粗構造に関する Higson コンパクト化でもあるので、$uX \setminus X$ は C_0 粗構造に関する Higson コロナを与える。更に X が全有界ならば、完備化 $\tilde{X}$ は X のコンパクト化であり、それは補題 3.6 により Smirnov コンパクト化となる。よってこの場合、上の定理は C_0 粗構造が完備化から決まる位相的粗構造であるということを述べている。さきほど挙げた例 $X = [0, 1)$ は全有界であり、したがって完備化 $\tilde{X} = [0, 1]$ にこの考察が適用できることに注意する。

上の定理 3.12 の証明のためには、一般の距離空間について成り立つ次の補題を用いる。

補題 3.14. $(x_n), (x'_n)$ を距離空間 X 内の二つの点列とし、各 n に対して $d(x_n, x'_n) \geq r$ であるとする。このとき、部分列 $(x_{n_k}), (x'_{n_k})$ であって、$A = \{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}, A' = \{x'_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ に対して $d(A, A') \geq r/3$ が成立するようなものが存在する。

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$I_n, J_n \subset \mathbb{N}$ をそれぞれ、$d(x_i, x'_n) < r/3$, $d(x'_i, x_n) < r/3$ なる $i \in \mathbb{N}$ 全体の集合として定義する。すると、$i, j \in I_n$ に対して $d(x_i, x_j) < 2r/3$ であるから $d(x'_i, x_j) \geq d(x'_i, x_i) - d(x_i, x_j) > r - 2r/3 = r/3$ となる。よって、ある n に対して I_n が無限集合であれば、$I_n = \{n_1, n_2, \ldots\}$, $n_1 < n_2 < \cdots$ と番号づけるとき、(x_{n_k}) と (x'_{n_k}) が求める部分列である。ある n に対して J_n が無限集合であっても同様である。そこで、I_n, J_n がすべての n に対して有限集合であるとする。つまり、与えられた n に対して、十分大きい $N(n)$ を取れば $i > N(n)$ のとき $d(x_i, x'_n) \geq r/3, d(x'_i, x_n) \geq r/3$ が成立するとしよう。ところがこの場合、$n_1, n_2, \ldots$ を帰納的に取っていき、求める部分列 (x_{n_k}) と (x'_{n_k}) を構成することは容易である。実際、$n_k = 1 + \max\{n_{k-1}, N(n_1), \ldots, N(n_{k-1})\}$ とすればよい。 □

定理 3.12 の証明. 簡単のため、X は可分であると仮定する（一般の場合については、[4, Theorem 3.5, Lemma 3.6] を参照)。uX は C_0 粗構造についての Higson コンパクト化である（系 3.7)。よって、X の C_0 制御集合は uX による位相的粗構造においても制御集合となる [8, Proposition 2.45]。

逆に、$E \subset X \times X$ が uX による位相的粗構造において制御集合、つまり $E \in \mathcal{E}_{uX}$ であるとし、E が C_0 制御集合であることを示そう。E を $E \cup E^{-1}$ に置き換えれば、$E = E^{-1}$ であると仮定して差し支えない。

さて、命題 2.7 によれば、$f \colon X \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \operatorname{diam} E[x]$ で定めるとき、f が無

限遠でゼロに収束していることをいえばよい。もし、これが成り立たないとすると、E 内の点列 $((x_n, x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ と $r > 0$ であって、$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は X のコンパクト集合には含まれず、かつすべての n に対して $d(x_n, x'_n) \geq r$ となるようなものが存在する（X の可分性を用いた）。補題 3.14 により、これらを適当な部分列に置き換えて、$A = \{x_n \mid k \in \mathbb{N}\}, A' = \{x'_n \mid k \in \mathbb{N}\}$ に対して $d(A, A') \geq r/3$ が成立するようにできる。すると補題 3.6 によって、$\mathrm{cl}_{uX} A$ と $\mathrm{cl}_{uX} A'$ は交わらないが、これを言い換えると

$$(\mathrm{cl}_{uX} A \times \mathrm{cl}_{uX} A') \cap \Delta_{uX} = \emptyset$$

である。いま、$F = \{(x_n, x'_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\mathcal{E}_{uX}$ の元 E に含まれているので、F の $uX \times uX$ における閉包 $\overline{F}$ に対して

$$\overline{F} \setminus (X \times X) \subset (\mathrm{cl}_{uX} A \times \mathrm{cl}_{uX} A') \cap \Delta_{uX \setminus X} = \emptyset$$

である。ところが $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は X のコンパクト集合には含まれないので左辺は空でなく、矛盾する。 □

4 主結果と証明のアイディア

固有粗空間のあいだの粗写像 $f\colon X \to Y$ は Higson コロナに連続写像 $\nu f\colon \nu X \to \nu Y$ を誘導するのだった。また、互いに近い粗写像 $f, g\colon X \to Y$ に対して $\nu f = \nu g$ であることが容易に確かめられる[*4]。以下では注意 3.13 でふれた全有界な局所コンパクト距離空間とその間の粗写像に、この構成を適用したい。記号 **TB** により、全有界な局所コンパクト距離空間に C_0 粗構造を与えて得られる粗空間全体のなす圏を表す。但し、**TB** における X から Y への射は、粗写像 $X \to Y$ 全体の「近い」という関係による同値類とする。圏 **TB** の中で二つの対象が同型であるということは、粗同値であるということにほかならない。

注意 4.1. ある距離付け可能なコンパクト化による位相的粗構造をもつ粗空間全体に、上と同様の射を考えて得られる圏を **CC** と書く。注意 3.13 により、圏 **CC** は圏 **TB** と同値であることが分かる。実際、$X \in$ **CC** の粗構造を定めている距離付け可能コンパクト化 $\tilde{X}$ の距離 d を一つ固定すると、これは全有界で、**TB** の対象を与える。$X \in$ **TB** に対しては、完備化による位相的粗構造が **CC** の対象を与える。注意 3.13 から、この二つは互いに逆となっている。

さて、**TB** の対象 X の Higson コロナ νX とは、注意 3.13 により、完備化 $\tilde{X}$ における剰余 $\tilde{X} \setminus X$ にほかならないのだった。この νX はコンパクト距離空間である。そこで、**K** をコンパクト距離付け可能空間と連続写像のなす圏とすると、Higson コロナ関手 $\nu\colon$ **TB** $\to$ **K** が定義される。次が本稿の主定理である。

[*4] このことから、粗同値な二つの固有粗空間の Higson コロナが同相であることが直ちに従う。

定理 4.2. $\nu\colon \mathbf{TB} \to \mathbf{K}$ は圏の同値を与える。

この定理の証明のアイディアを紹介したい。まず、圏の同値を証明するには、次の三点を証明すればよい。(1) 射の集合に誘導される写像 ν: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{TB}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\nu X, \nu Y)$ は各 X, Y について全射、(2) 同じ写像が各 X, Y について単射、(3) $\mathbf{K}$ の任意の対象 K は、$\mathbf{TB}$ のある対象 X に対して νX と同型。このうち (3) は $X = C \times [0,1)$ とすればよいので簡単である。(2) も本質的な困難はなく、証明のメインは (1) を示す部分である。

(1) を示すため、X, Y を $\mathbf{TB}$ の対象とし、連続写像 $\varphi\colon \nu X \to \nu Y$ が与えられたとする。目標は $\nu f = \varphi$ なる粗写像 $f\colon X \to Y$ の構成である。$\tilde{X}, \tilde{Y}$ をそれぞれ完備化とすると、$\nu X = \tilde{X} \setminus X, \nu Y = \tilde{Y} \setminus Y$ なのであった。$\tilde{X}, \tilde{Y}$ の距離をそれぞれ d, ρ と書く。まず、$\nu X = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$ となるように、νX の $\tilde{X}$ における開近傍の減少列 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ を選ぶ。但し $U_0 = X$ としておく。νY のコンパクト性を用いて、各 n に対して有限個の点 $y_{n,1}, \ldots, y_{n,k_n} \in Y$ を $\nu Y \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B_\rho(y_{n,i}, 1/n)$ となるように選ぶ。各 $x \in X$ に対して、$n(x) = \max\{n \,|\, x \in U_n\}$ とおき、$\tilde{x} \in \nu X$ を $d(x, \tilde{x}) = d(x, \nu X)$ となるように選ぶ。$i(x) \in \{1, \ldots, k_{n(x)}\}$ を $\varphi(\tilde{x}) \in B_\rho(y_{n(x),i(x)}, 1/n)$ となるように選び、最後に $f(x) = y_{n(x),i(x)}$ と定義する。このように定義された $f\colon X \to Y$ は粗写像で、$\nu f = \varphi$ となることが証明できる。

5 いくつかの系と残された問題

定理 4.2 の直接の系として次が得られる。

系 5.1. X, Y を全有界な局所コンパクト距離空間とし、これらに C_0 粗構造を与える。次は同値である。

(1) X と Y は粗同値である。
(2) νX と νY は同相である。
(3) $\tilde{X} \setminus X$ と $\tilde{Y} \setminus Y$ は同相である。ここで、$\tilde{X}, \tilde{Y}$ は完備化を表す。 □

更に注意 4.1 を考慮に入れれば、

系 5.2. X, Y にそれぞれ距離付け可能なコンパクト化 $\gamma X, \gamma Y$ から定まる位相的粗構造 $\mathcal{E}_{\gamma X}, \mathcal{E}_{\gamma Y}$ を与えるとき、X と Y が粗同値であるための必要十分条件は、$\gamma X \setminus X$ と $\gamma Y \setminus Y$ が同相になることである。 □

これで無限遠境界からもとの空間の「粗い」幾何を復元するという本稿冒頭に述べた目標に、ひとまず戻ってくることができた。はじめの系 5.1 は $\mathbf{TB}$ の対象（あるいは $\mathbf{CC}$ の対象）という非常に特別な粗空間について成り立つものであるが、一般の固有粗空間については反例がある。

例 5.3. $X = Y = \mathbb{N}$ とし、X, Y にそれぞれ次のような粗構造 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ を入れる。

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X \mid E[x], E^{-1}[x] \text{ がすべての } x \in X \text{ に対して有限 }\}$$
$$\mathcal{F} = \{F \subset Y \times Y \mid \sup_{y \in Y} |F[y]|, \sup_{y \in Y} |F^{-1}[y]| \text{ が有限 }\}$$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ はそれぞれ $\mathbb{N}$ 上の**密着粗構造 (indiscrete coarse structure)**、**普遍有界幾何構造 (universal bounded geometry structure)** と呼ばれるものである。どちらの粗構造においても、有界集合はちょうど有限集合であることに注意する。

さて、このとき X, Y 上の Higson 関数はともに無限遠で定数に収束する実数値関数に一致する。よって、Higson コロナ $\nu X, \nu Y$ はともに一点集合であるから同相である。しかし X から Y への粗写像は一つも存在せず、したがって X と Y とは粗同値ではない。これを証明するため、$f\colon X \to Y$ が粗写像であるとする。まず粗写像の定義 2.10 (2) より、各 $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y)$ は有限集合である。よって、$f(X)$ は無限集合であるから、無限部分集合 $X' \subset X$ を、$f|_{X'}$ が単射であるように取れる。さて、$X' = \{i_1, i_2, \ldots\}$ と表した上で、$E = \{(i_m, i_n) \mid m \leq n \leq 2m\}$ と定義する。すると $E \in \mathcal{E}$ であるが、$(f \times f)(E) \notin \mathcal{F}$ である。したがって f は定義 2.10 (1) を満たさず、矛盾である。

問題 5.4. 固有距離空間の有界粗構造同士で、同相な Higson コロナをもつが粗同値でない例はつくれるだろうか。

定理 4.2 により、コンパクト距離空間の位相不変量は、すべて対応する **TB** の対象の粗不変量であり、また逆も然りである。しかし、具体的な位相不変量が、具体的な粗不変量にどう対応しているのかは明らかでない。

問題 5.5. コンパクト距離空間の位相不変量、たとえば被覆次元、Čech コホモロジー群などが、**TB** のどのような不変量に対応するかを調べよ。

一般の粗空間に対して定義される不変量としては、漸近次元、粗コホモロジー群などがある (Roe [7, 8] を参照)。

最後に、定理 4.2 から観察できるいくつかの事実について述べておきたい。そのために、粗埋め込みの定義をしておく。一般に粗空間 $(X, \mathcal{E})$ が与えられたとき、$\{E \in \mathcal{E} \mid E \subset A \times A\}$ は A 上の粗構造を与え、これを $A \subset X$ に誘導される粗構造という。粗空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$ が**粗埋め込み**であるとは、像 $i(X)$ に Y から誘導された粗構造に関して、$f\colon X \to i(X)$ が粗同値を与えることをいう。

まず、任意のコンパクト距離空間は Hilbert 立方体 Q に埋め込めるという、圏 **K** で成立する事実に注意する。これを **TB** の言葉に翻訳し、更にコンパクトでない任意の可分距離空間は Q を剰余とする距離付け可能コンパクト化をもつという事実に注目すると、次の命題が得られる。

命題 5.6. X をコンパクトでない可分距離付け可能空間とすると、X の位相に合致した全有界な距離 d が存在して、(X, d) に C_0 粗構造を入れるとき、**TB** の任意の対象は X に粗埋め込みできる。 □

たとえば、上で $X = \mathbb{N}$ とすると、次が分かる。

命題 5.7. **TB** の任意の対象は、離散位相をもつ可算距離空間と C_0 粗構造について粗同値である。 □

TB の対象 X に対して、νX の錐 $C(\nu X) = (\nu X \times [0,1])/(\nu X \times \{0\})$ を考えると、これはコンパクト距離付け可能空間で、位相に合致した距離 d をもつ。開錐 $X' = C(\nu X) \setminus (\nu X \times \{1\})$ は明らかに可縮であり、$X' = (X', d)$ は **TB** の対象で $\nu X' = \nu X$ を満たす。したがって、ν が圏同値であることより X は X' と **TB** の中で同型、つまり粗同値である。したがって、

命題 5.8. **TB** の任意の対象 X は、ある可縮な対象 X' であって、Higson コンパクト化 hX' も可縮であるようなものと粗同値である。 □

謝辞

本稿の内容、特に補題 3.14 の証明と例 3.9 については、山内貴光氏に重要な示唆をいただいた。この場を借りてお礼申し上げます。

参考文献

[1] E. Cuchillo-Ibáñez, J. Dydak, A. Koyama and M. A. Morón, *C_0-coarse geometry of complements of Z-sets in the Hilbert cube.* Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 10, 5229–5246.

[2] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions.* Graduate Texts in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[3] N. Higson, E. K. Pedersen and J. Roe, *C^*-algebras and controlled topology.* K-Theory **11** (1997), no. 3, 209–239.

[4] K. Mine and A. Yamashita, *Metric compactifications and coarse stuctures.* preprint, available at `http://arxiv.org/abs/1106.1672`

[5] F. Paulin, *Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord.* J. London Math. Soc. (2) **54** (1996), no. 1, 50–74.

[6] J. R. Porter and R. G. Woods, *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[7] J. Roe, *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds.* Mem. Amer. Math. Soc. **104** (1993), no. 497

[8] J. Roe, *Lectures on coarse geometry.* University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI (2003).

[9] R. Woods, R. *The minimum uniform compactification of a metric space.* Fund. Math. **147** (1995), no. 1, 39–59.

[10] N. Wright, *C_0 coarse geometry and scalar curvature.* J. Funct. Anal. **197** (2003), no. 2, 469–488.